INSA DE TOULOUSE - DEPARTEMENT DE STPI 1ÈRE ANNEE

EXAMEN ELECTROSTATIQUE

Durée 2 heures - Calculatrice interdite

Données utilisables dans tout le sujet

Expression des opérateurs en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (E_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

Théorème de Gauss intégral : $\oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{\Sigma\left(Q_{int/S}\right)}{\varepsilon_0}$ avec S une surface fermée

Théorème de Gauss local : $div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Théorème d'Ampère intégral : $\oint_\Gamma \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0\,\Sigma\left(I_{enl/\Gamma}\right)$ avec Γ un contour fermé

Tout résultat littéral non homogène ou numérique sans unité sera considéré comme nul

Exercice n°1 : Question relative au TP (*2 points*)

On dispose d'un électroscope et d'un bâton isolant électrisé. On suppose qu'initialement le bâton est chargé positivement et que l'électroscope est neutre.

1. Décrire en faisant des schémas montrant clairement les étapes et la répartition qualitative des charges, comment on peut arriver à charger par influence l'électroscope.
2. Préciser le signe des charges en excès sur l'électroscope chargé, puis expliquer pourquoi on parle de "charge par influence partielle".

Exercice n°2 : Principe de superposition et théorème de Gauss (*5 points*)

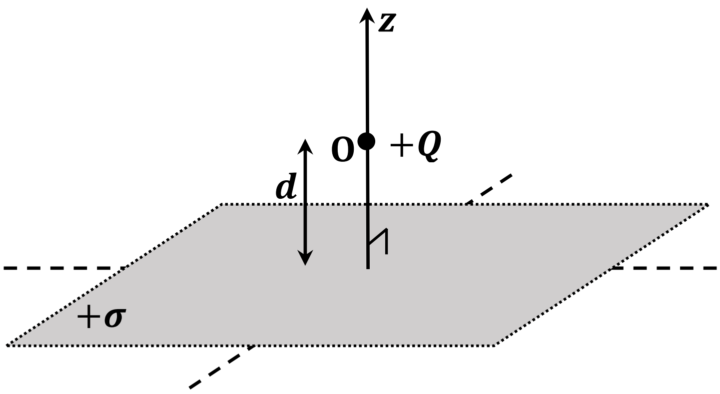
N.B. *Les questions **4.** et **5.** de cet exercice sont indépendantes du début de l'exercice.*

Une charge ponctuelle positive $+Q$ est placée au point origine O, situé à une distance d au-dessus d'un plan infini uniformément chargé par une densité superficielle de charges positive $+\sigma$. L'axe (Oz) est normal à ce plan.

Rappel : un plan infini portant une charge superficielle uniforme σ crée en tout point de l'espace un champ électrique uniforme orienté perpendiculairement à ce plan et de module :

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

On cherche à déterminer s'il existe un point de l'espace, baptisé P_0, où le champ électrique total, généré par le plan et la charge ponctuelle, est nul.



1. Déterminer sans calcul, mais à l'aide de schémas et en justifiant votre réponse, dans quelle région de l'espace pourrait se situer ce point P_0 de coordonnées cartésiennes (x_0, y_0, z_0). On pourra préciser certaines conditions sur x_0, y_0 et z_0 par exemple.
2. Déterminer par le calcul la position exacte du point P_0 s'il existe.
3. Quelle condition doit satisfaire la grandeur $+\sigma$, pour que ce point existe ?
4. Quelle est la valeur du flux Φ_1 du champ électrique total à travers une sphère de centre O et de rayon R, tel que $R < d$.
5. Quelle est la valeur du flux Φ_2 du champ électrique total à travers un cylindre fermé d'axe (Oz), de diamètre D et de hauteur $2h$, situé de part et d'autre du plan chargé, c'est-à-dire entre :

   $$z = -d - h \qquad \text{et} \qquad z = -d + h$$

   On distinguera le cas où $h > d$ et le cas où $h < d$ et on schématisera ces situations.

<u>Exercice n°3 : Charges ponctuelles (*4 points*)</u>

4 charges électriques ponctuelles immobiles sont réparties aux sommets d'un trapèze isocèle dont les coordonnées cartésiennes des sommets sont :

$$\mathrm{A}(-2a, 0,0) \quad ; \quad \mathrm{B}(-a, -a, 0) \quad ; \quad \mathrm{C}(+a, -a, 0) \quad ; \quad \mathrm{D}(+2a, 0,0)$$

Les charges situées sur les sommets A et B valent $+q$. Les charges situées sur les sommets C et D valent $-q$.

1. Après avoir dessiné ce système de charges ponctuelles et analysé les éventuels plans de symétrie et/ou d'antisymétrie, déduire l'orientation du champ électrique en un point $\mathrm{M}(0, y, 0)$ situé sur l'axe $(\mathrm{O}y)$.
2. Donner l'expression du champ électrique au point O en fonction de q et a. Préciser clairement son orientation, son module et donner son expression vectorielle.
3. Calculer le module du champ électrique au point O pour $q = 2.10^{-9}$ C et $a = 3.10^{-3}$ m.
   On donne : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 \ (SI)$ et on prendra : $\sqrt{2} \approx 1{,}4$
4. Déterminer la valeur du potentiel électrostatique au point O. On considérera que très loin des charges le potentiel tend vers 0 (origine du potentiel à l'infini).

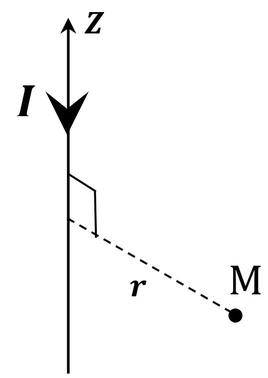
Exercice n°4 : Théorème de Gauss intégral et local (*6 points*)

On considère un cylindre d'axe $(0z)$ et de longueur infinie. Ce cylindre est creux, c'est-à-dire formé d'une paroi épaisse comprise entre un rayon interne R_1 et un rayon externe R_2. La paroi porte une densité de charge volumique uniforme positive ρ, le reste de l'espace est supposé vide de charge.

1. Analyser les invariances et les plans de symétrie de ce système.
2. Utiliser le théorème de Gauss intégral pour calculer $\vec{E}_{ext}$, le champ électrique généré en tout point M situé à l'extérieur du cylindre à une distance r de l'axe $(0z)$ telle que $r > R_2$. On précisera clairement la surface fermée utilisée et la somme des charges intérieures.
3. Utiliser le théorème de Gauss local pour calculer $\vec{E}_{paroi}$, le champ électrique généré en tout point M situé à l'intérieur de la paroi du cylindre à une distance r de l'axe $(0z)$ telle que $R_1 < r < R_2$. On montrera que le module du champ s'écrit : $A(r) + \frac{C}{r}$, on donnera l'expression de la fonction $A(r)$.
4. Déterminer la valeur de la constante C en utilisant la continuité du champ électrique en $r = R_2$. Puis donner l'expression vectorielle du champ électrique en tout point de la paroi du cylindre.
5. Utiliser le théorème de Gauss intégral pour calculer $\vec{E}_{int}$, le champ électrique généré en tout point M situé à l'intérieur du cylindre à une distance r de l'axe $(0z)$ telle que $r < R_1$. On précisera clairement la surface fermée utilisée et la somme des charges intérieures.
6. En combinant les résultats du **4.** et du **5.** évaluer si le champ électrique présente une discontinuité en R_1. Commenter ce résultat.

Exercice n° 5 : Magnétostatique (*3 points*)

On considère un fil rectiligne infini orienté suivant l'axe $(0z)$. Ce fil est parcouru par un courant électrique d'intensité I constante, orienté comme sur la figure.



1. Étudier les invariances du système et choisir le système de coordonnées le mieux adapté à son étude. Préciser de quelles variables dépend le champ magnétique $\vec{B}$ en tout point M de l'espace.
2. Analyser les plans de symétrie et d'anti-symétrie du système et en déduire l'orientation du champ magnétique $\vec{B}$ en tout point M de l'espace.
3. Calculer le champ magnétique $\vec{B}(\mathrm{M})$ en utilisant le théorème d'Ampère dans sa forme intégrale en choisissant un contour fermé astucieux que l'on précisera et schématisera. Donner l'expression vectorielle de $\vec{B}(\mathrm{M})$.
4. **Question Bonus (*2 points*)** : Calculer l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}(\mathrm{M})$ en utilisant la forme locale : $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$ et en considérant que $\vec{A} = \vec{0}$, à une distance $r = r_0$ du fil.